WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

Исследование звездных скоплений с помощью компьютерного телескопа

А. К. ДЬЮДНИ

Далеко в космическом пространстве под музыку гравитационных сил в хороводе кружится скопление звезд. На протяжении человеческой жизни их движение мы почти не замечаем, но если рассматривать его в другом временно́м масштабе, когда годы эквивалентны секундам, то можно увидеть причудливые переплетения звездных траекторий. Иногда две звезды, приблизившись друг к другу, исполняют парный танец, а затем одна из них стремительно уносится в окружающее пространство.

С помощью мощного телескопа можно рассмотреть структуру некоторых звездных скоплений нашей Галактики, но он не позволяет сжать годы в секунды — это может сделать только компьютер. Кроме того, компьютер можно запрограммировать так, что он будет играть роль своеобразного телескопа, позволяющего разглядывать гипотетические звездные скопления. При этом можно наблюдать движение отдельных объектов скопления в космическом временно́м масштабе, получая последовательность фотоснимков, на которых фиксируются пунктирные траектории каждой звезды, вьющиеся и переплетающиеся с траекториями других звезд скопления (см. рисунок на с. 91).

Объясняется ли эволюция звездных скоплений, наблюдаемая астрономами, только гравитационными силами? Компьютеры помогают дать ответ как на этот вопрос, так и на другие, связанные с ним. В мае 1984 г. в Принстонском университете на очередном 113-м симпозиуме Международного астрономического общества, на этот раз целиком посвященном динамике звездных скоплений, теоретики и специалисты по моделированию обсуждали проблему соответствия между гипотетическими и реальными звездными скоплениями.

Поставить космический балет при помощи компьютера сравнительно несложно. В принципе взаимодействия между звездами, входящими в скопление, описываются простым классическим законом: каждая звезда в паре с каждой другой звездой испытывает действие гравитационной силы, пропорциональной произведению масс звезд рассматриваемой пары и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Вычисления по этой формуле выполнить нетрудно: нужно перемножить массы звезд, полученное произведение умножить на коэффициент пропорциональности (гравитационную постоянную) и результат разделить на квадрат расстояния между звездами. Суммарный эффект всех парных взаимодействий, по-видимому, полностью определяет характер изменений, претерпеваемых со временем звездным скоплением. Программа CLUSTER вычисляет результирующую силу, действующую на каждую звезду, и перемещает эту звезду в следующее по времени положение. Процедура циклически повторяется на заданном отрезке времени, соответствующем нескольким столетиям, по принятому в модели масштабу.

Правда, вводить с клавиатуры координаты и скорости большого числа звезд — занятие довольно скучное, но зато вы видите, как перед вами на экране разворачивается эволюция миниатюрной вселенной. Звезды в центральной части скопления движутся по неустойчивым хаотическим орбитам, а те, которые находятся в периферийных областях, медленно уплывают, останавливаются и плавно возвращаются назад. Наиболее интересно наблюдать, как звезды сталкиваются и как некоторые из них покидают скопление.

Когда две звезды сближаются, они сообщают друг другу колоссальные гравитационные ускорения и после столкновения стремительно расходятся в разные стороны. Стремительный выход отдельных звезд за пределы скопления обычно является результатом одного или более таких сближений. Звезда, покинувшая скопление, может вернуться в него, а может и не вернуться. Астрономическое тело обладает определенной скоростью отрыва, зависящей от его массы и массы того тела или объекта, от которого оно отрывается. Если звезда, удаляющаяся от скопления, достигла этой скорости, она никогда к нему не вернется. Те, кто еще не имеют опыта в моделировании звездных скоплений, наверное, часто будут наблюдать «побеги» звезд из составленных ими конфигураций скоплений. На самом деле в звездных скоплениях, построенных новичками, звездный хоровод быстро распадается. Лучше всего начинать с несложных двойных или тройных звездных систем.

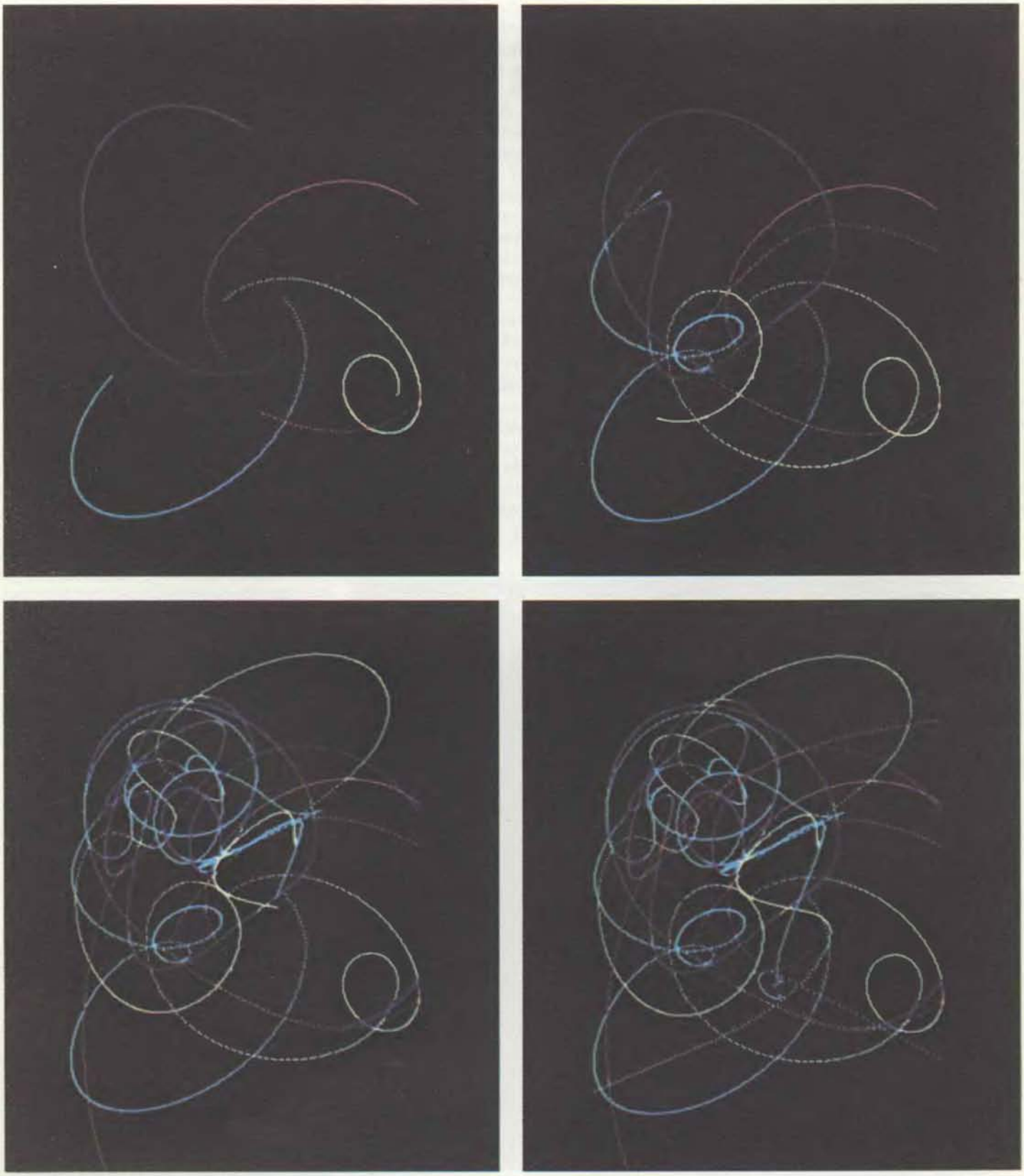
Программа CLUSTER имеет простую структуру. Она состоит из цикла инициализации, за которым следует двойной цикл, в котором вычисляются изменения скорости, ускорения и положения каждой звезды как результат суммарного воздействия со стороны остальных звезд. Здесь мы рассмотрим простейшую версию программы, в которой такие величины, как интервал между двумя соседними моментами времени, коэффициент пропорциональности в формуле притяжения и массы звезд, являются как бы «встроенными», т. е. фиксированными. Несмотря на свою простоту, даже эта версия программы CLUSTER способна моделировать почти все явления, присущие звездным скоплениям. В программе используются три множества массивов. В массивах первого множества хранятся значения ускорений, которыми обладают звезды на данный момент в каждом направлении по трем осям координат. Имена этих массивов соответственно *ax*, *ay* и *az*. Таким образом, *ax*(*i*), *ay*(*i*) и *az*(*i*) указывают компоненты ускорения *i*-й звезды по осям *x*, *y*, и *z*. Элементы этих трех массивов не обязательно инициализировать (т. е. присваивать им начальные значения) перед выполнением программы. Массивы второй группы *vx*, *vy* и *vz* хранят значения скоростей: *vx*(*i*), *vy*(*i*) и *vz*(*i*) указывают соответственно компоненты скорости *i*-й звезды вдоль осей *x*, *y* и *z*. Массивы третьей группы предназначены для координат положения звезд: *x*(*i*), *y*(*i*) и *z*(*i*) соответственно указывают координаты положения *i*-й звезды в данный момент по осям *x*, *y* и *z*. Элементы массивов *x*, *y*, *z* и *vx*, *vy* и *vz* следует инициализировать в начале программы.

Вслед за блоком инициализации идет главная часть программы CLUSTER. Двойной цикл может повторяться автоматически до бесконечности, или же программист должен указать, при каких условиях производится повторное выполнение цикла. Во внешнем цикле каждая звезда рассматривается по очереди и компоненты ее ускорения устанавливаются равными нулю. После этого во внутреннем цикле вычисляются силы, дей-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

ствующие на каждую звезду со стороны остальных звезд, входящих в скопление.

Предположим, к примеру, что индекс внешнего цикла равен i, а индекс внутреннего цикла — j. Во внутреннем цикле вначале производится проверка, не равен ли индекс i индексу j. Если индексы оказываются равными, программа не вычисляет силу, поскольку звезда сама себя не притягивает. Во всяком случае, это вычисление привело бы к попытке деления на нуль. (Это, пожалуй, единственная ситуация, в которой я мог бы искренне посочувствовать компьютеру.) Когда i и j не равны друг другу, программа CLUSTER пользуется формулой евклидова расстояния между звездами: разности координат по осям x, y и z возводятся в квадрат и складываются друг с другом. В результате мы получаем, конечно, квадрат расстояния. Затем производится проверка, не



Четыре звезды кружатся в космическом хороводе в течение нескольких лет и затем покидают сцену

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

равно ли полученное расстояние нулю. Если да, то нужно дать сигнал тревоги в той или иной форме, потому что компьютеру вскоре придется выполнить операцию деления на нуль. Моя версия программы в таких случаях выдает сообщение «Столкновение!»

Если все в порядке, команды внутреннего цикла завершают вычисление расстояния между звездами, беря квадратный корень из квадрата расстояния, вычисленного ранее. Затем производится деление числа 1000 на квадрат полученного расстояния и в результате этого деления получается значение силы. Наконец, последняя задача, которую нужно решить во внутреннем цикле, — это определить компоненты ускорения i-й звезды. Для этого необходимо суммировать все силы, действующие со стороны других звезд. Например, компонента ускорения i-й звезды по оси x может быть выражена в общем виде следующим образом:

$$ax(i) \leftarrow ax(i) + f \times (x(j) - x(i))/d.$$

Здесь f и d представляют соответственно силу и расстояние. Отношение проекции расстояния между звездами i и j на ось x к полному расстоянию в точности соответствует составляющей силы, действующей на звезду i вдоль оси x. Компоненты ускорения звезды вдоль осей y и z вычисляются аналогичным образом.

Завершают программу два цикла, следующие один за другим. В первом осуществляется изменение значения скорости, а во втором — положения. Здесь возникает одна тонкость, на которую обратил мое внимание Дж. Хаббард, математик из Корнеллского университета, чей совет по поводу вычислений, выполняемых над множеством Мандельброта, оказался в высшей степени полезным (см. статью в рубрике «Занимательный компьютер» в журнале «В мире науки», 1985, №10). Дело в том, что можно вычислять координаты положения звезды до вычисления ее скорости, и получающиеся при этом результаты выглядят достаточно правдоподобными. Однако со временем движение звезд станет неестественным, поскольку при таком вычислении координат положения и скоростей звезд будет нарушаться закон сохранения энергии.

В цикле изменения скорости к текущему значению этой переменной просто прибавляется ускорение согласно следующей формуле:

$$vx(i) \leftarrow vx(i) + ax(i)$$

Здесь предполагается, что временной интервал между двумя последовательными моментами равен единице времени, через которую выражается скорость. Аналогичные формулы применяются для вычисления составляющих vy и vz. Вычисления координат, выполняемые в последнем цикле, также очень просты:

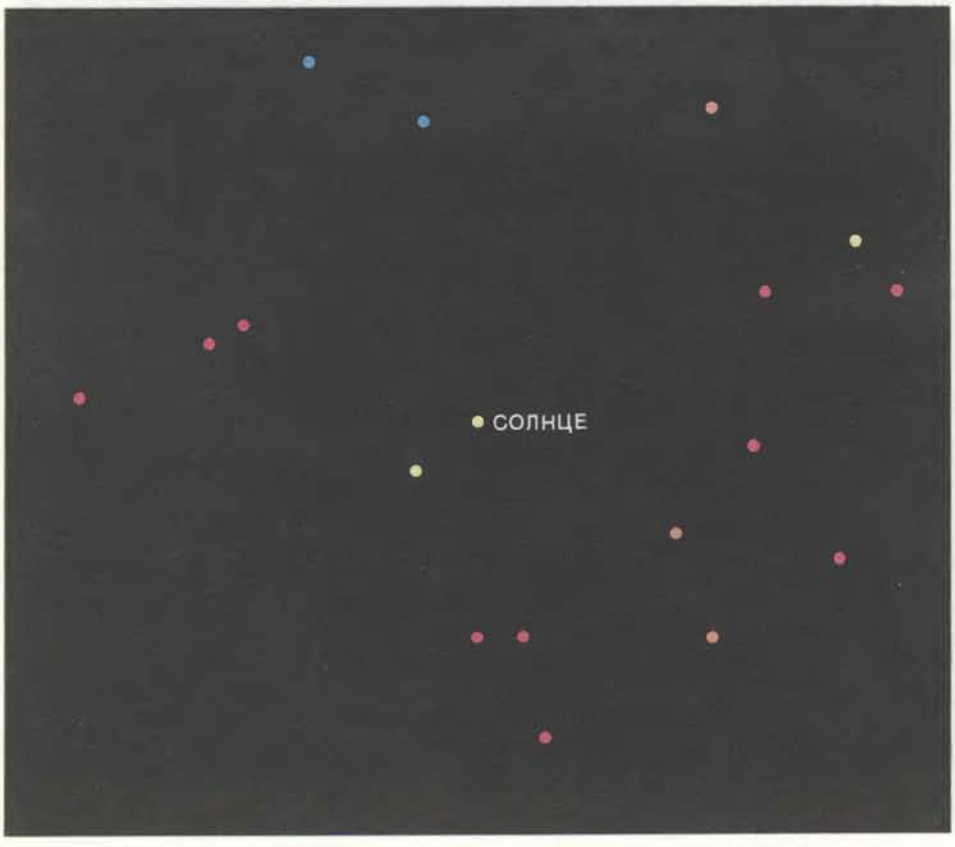
$$x(i) \leftarrow x(i) + vx(i).$$

Аналогичным образом изменяются элементы массивов y и z. На основе данных, получаемых в последнем цикле, программа CLUSTER определяет положение каждой звезды на двумерной поверхности экрана дисплея. При этом первые две координаты «наносятся» на экран, а третья координата по оси z игнорируется. Таким образом, можно представить себе, что мы наблюдаем скопление через иллюминатор, роль которого играет экран. Значения величин, вычисляемых в программе моделирования скопления, иногда оказываются очень малыми, а иногда и очень большими. По этой причине мы советуем пользоваться арифметическими операциями с двойной точностью так, чтобы округления не нарушали картины.

Время, затрачиваемое программой CLUSTER на один вычислительный цикл, зависит от количества звезд в системе. Системы, насчитывающие около 10 звезд, отличаются интересным (с эстетической точки зрения) поведением, но для того, чтобы достичь реалистичной сложности, количество звезд должно быть порядка 100 или даже 1000. К сожалению, число шагов алгоритма в основном вычислительном цикле возрастает как квадрат числа звезд в скоплении. И хотя специалисты по моделированию звездных систем нашли интересный способ обойти это ограничение, возникает ряд других проблем, осложняющих моделирование.

Наиболее серьезная проблема связана с тем обстоятельством, что мы пытаемся с помощью дискретной модели описать поведение по существу непрерывной системы. Непрерывные гладкие орбиты аппроксимируются последовательностью скачков, траектория которых все дальше удаляется от истинной орбиты, по которой звезда движется в скоплении. Неточности подобного рода можно в какой-то степени скорректировать при наличии статистической регулярности, но когда звезды подходят друг к другу на очень малое расстояние, дискретная модель неестественно и непоправимо усиливает эффекты, связанные с большими гравитационными ускорениями.

Если, например, в ходе выполнения вычислительного цикла одна звезда (Стелла) оказывается в непосредст-



Могли бы звезды соседней с нашей галактики образовать звездное скопление?

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

НАЗВАНИЕ ЗВЕЗДЫ	КООРДИНАТЫ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ			СОСТАВЛЯЮЩИЕ СКОРОСТИ			ЦВЕТ	МАССА
	X	Y	Z	VX	VY	VZ		
СТРУВЕ 2398	68	—365	631	—5,69	4,76	3,35	КРАСНАЯ	0,26
РОСС 248	464	—42	450	—8,75	1,13	—15,45	КРАСНАЯ	0,17
61 ЛЕБЕДЯ	394	—377	433	—2,78	22,03	0,02	ОРАНЖЕВАЯ	0,69
ЛАЛАНД 21185	—404	107	307	7,32	—0,47	—20,11	КРАСНАЯ	0,39
ПРОЦИОН 5	—295	658	68	2,38	0,75	—3,65	ГОЛУБАЯ	1,29
ЗВЕЗДА БАРНАРДА	—7	—371	30	—0,87	24,20	16,78	КРАСНАЯ	0,21
ε ЭРИДАНА	408	534	—114	4,60	0,69	—0,50	ОРАНЖЕВАЯ	0,74
ВОЛЬФ 359	—462	136	62	—0,82	9,86	—5,94	КРАСНАЯ	0,10
СИРИУС	—98	514	—157	1,89	—2,21	—2,59	ГОЛУБАЯ	2,96
ЛЕЙТЕН 726-8	487	219	—175	2,08	10,80	—0,41	КРАСНАЯ	0,19
РОСС 128	—683	44	13	2,51	—2,32	—4,09	КРАСНАЯ	0,21
СОЛНЦЕ	0	0	0	0,00	0,00	0,00	ЖЕЛТАЯ	1,00
τ КИТА	646	307	—208	0,52	—6,62	3,92	ЖЕЛТАЯ	0,85
α ЦЕНТАВРА	—106	—86	—243	—1,95	4,68	4,51	ЖЕЛТАЯ	1,03
ЛЕЙТЕН 789-6	608	—235	—182	—6,75	10,81	10,56	КРАСНАЯ	0,13
ЛЕЙТЕН 725-32	718	227	—233	4,70	6,16	0,51	КРАСНАЯ	0,21
РОСС 154	111	—536	—241	1,79	1,36	0,11	КРАСНАЯ	0,24
ε ИНДЕЙЦА	334	—194	—594	—3,54	17,71	2,28	ОРАНЖЕВАЯ	0,69

Параметры всех (за исключением трех) звезд, ближайших соседей Солнечной системы

венной близости от другой звезды (Астер), мощное гравитационное поле резко увеличивает компоненты ускорения обеих звезд. Это увеличение на последующих шагах вычисления распространяется на компоненты скорости, а затем и на координаты положения звезд. На следующей итерации процесса моделирования Стелла оказывается уже очень далеко от Астера и не может «выплатить гравитационного долга». Таким образом возник излишек кинетической энергии. За счет этого эффекта искусственные звездные скопления распадаются быстрее реальных. Есть два пути преодоления указанного затруднения. Первый путь трудный, второй проще. В первом случае необходимо вычислять кеплеровские орбиты для пары близко сошедшихся звезд. Теоретики предпочитают этот метод прежде всего потому, что формулы, по которым вычисляются орбиты, являются абсолютно точными. Более простой, но иногда неточный метод обработки данных, описывающих ситуации, когда звезды приближаются друг к другу, заключается в том, чтобы уменьшить масштаб шагов по времени в основном вычислительном цикле. Возможно, читатели пожелают взять на вооружение этот прием и воспользоваться им при составлении усовершенствованной версии программы — SUPERCLUSTER.

Программу SUPERCLUSTER можно получить путем несложной модификации программы CLUSTER. Во-первых, в программе SUPERCLUSTER массы звезд, входящих в скопление, могут быть различными. Это изменение можно легко реализовать, введя перед началом выполнения программы значения масс в массив m. Расчет гравитационной силы несколько усложняется: сила уже не является функцией только $1/d^2$, она теперь пропорциональна произведению масс, деленному на d^2. Кроме того, новая версия программы отличается тем, что звезды подразделяются на спектральные типы. Как и для масс, в программе организуется массив *spec*, элементы которого должны быть заданы перед началом выполнения программы. Однако этот массив используется только в фазе высвечивания звезд на экране после очередной итерации вычислений. Цвет звезд изменяется в пределах от голубого до красного. Зеленый цвет отсутствует. Третье усовершенствование программы CLUSTER состоит в том, что шаг по времени берется произвольным.

В программе SUPERCLUSTER используется переменная *delta*, значение которой равно интервалу между двумя последовательными моментами времени. Эта величина устанавливается перед началом выполнения основных вычислительных циклов. Конечно, эта переменная должна повлиять на формулы, по которым вычисляются изменения как скорости, так и положения звезд: в формуле для скорости на нее множится ускорение, а в формуле для координат на нее множится скорость.

Рассмотрим теперь простой способ, позволяющий обрабатывать данные, описывающие ситуации, возникающие при сближении звезд. Прежде всего нужно четко установить критерий «близости». Затем в программу нужно ввести проверку, соответствующую выбранному критерию. Проверка должна производиться сразу после вычисления расстояния между двумя звездами. Если зафиксировано «сближение», программа SUPERCLUSTER заменяет значение *delta*, уменьшая ее до одной десятой от ее текущей величины, — по крайней мере до тех пор, пока ни одна пара звезд уже не будет удовлетворять критерию близости. Этот прием, конечно, помогает смягчить внезапные скачки гравитации в дискретной модели. Однако он создает еще более серьезные проблемы, когда звезды по-настоящему близко подходят друг к другу. Если расстояние между звездами уменьшается, скажем, в 10 раз, то гравитационная сила увеличивается в 100 раз! К счастью, опасные сближения случаются довольно редко. Метод уменьшения временно́го интервала был стандартным средством, которым обычно пользовались специалисты, профессионально занимающиеся моделированием звездных скоплений.

Чтобы программа SUPERCLUSTER давала небессмысленные с астрономической точки зрения результаты, нужно ввести единицы измерения расстояния, массы, а также некоторые другие характеристики физической реальности. В астрономии принята

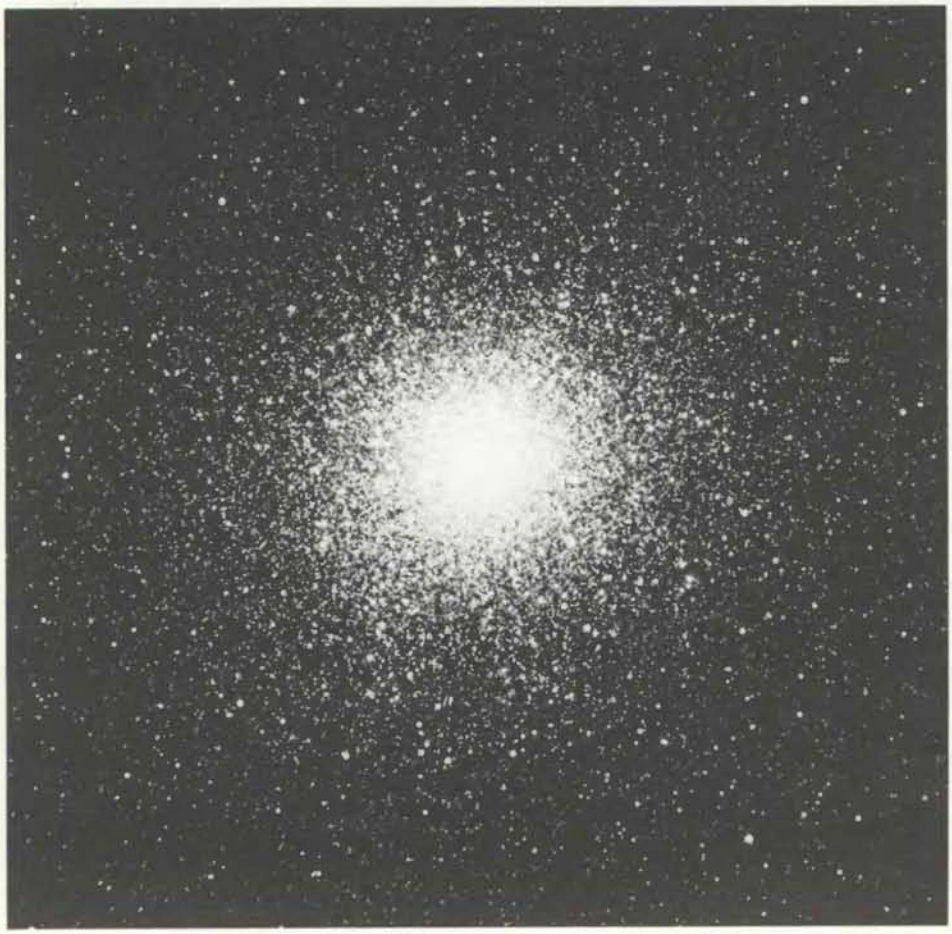
WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

удобная мера расстояния, называемая астрономической единицей (АЕ) и соответствующая среднему расстоянию от Земли до Солнца. Массу можно измерять, приняв за единицу массу Солнца, а время лучше всего измерять в годах. При этих условиях универсальная постоянная гравитационного притяжения будет приблизительно равна 39. В программе SUPERCLUSTER используется именно это значение в отличие от 1000, принятого в программе CLUSTER.

Теперь все готово к тому, чтобы запустить любую из рассмотренных нами программ. В качестве предварительного упражнения для программы CLUSTER можно взять четыре звезды. Расположим их по вершинам квадрата, размер которого на экране был бы 3—5 см. Помимо координат x и y, соответствующих плоскости экрана, для каждой звезды следует задать также, вообще говоря, ненулевое значение координаты z. В противном случае пространство, в котором движутся звезды, будет ограничено плоскостью и сближения между ними будут наблюдаться намного чаще. Компоненты скоростей должны быть небольшими (скажем, в пределах от -5 до $+5$), а направление скоростей должно быть выбрано так, чтобы звезды двигались по часовой стрелке по замкнутым траекториям.

Программу SUPERCLUSTER можно попробовать в действии на звездной системе, изображенной на рисунке на с. 92. Эта система образована звездами, являющимися ближайшими соседями Солнечной системы в нашей Галактике. Что случилось бы, если бы Солнце и несколько соседних с ним звезд были отрезаны (в гравитационном смысле) от остальной части Галактики и предоставлены сами себе на неограниченное время? Каким было бы движение звезд? Образовали бы они звездное скопление или рассеялись? Этот вопрос может иметь, а может и не иметь научного значения, однако сам по себе он интересен. Кроме того, точные координаты и скорости известны нам лишь для нескольких ближайших звезд (см. таблицу на с. 93).

Звездные скопления бывают либо открытыми (рассеянными), либо шаровыми. Открытые скопления насчитывают несколько тысяч звезд, в то время как число звезд в шаровых скоплениях может достигать нескольких миллионов. Пока исследователи, среди которых можно назвать и Дж. Джернигена, работающего в Калифорнийском университете в Беркли, ограничивались моделированием лишь открытых звездных скоплений и не очень многочисленных. Шаровые скопления пока остаются неприступными. Тем не менее Джерниген и некоторые другие пионеры моделирования, например такие, как Аарсет также из Калифорнийского университета в Беркли, уже на протяжении десятилетий наблюдают коллапсы звездных скоплений, моделируемых на ЭВМ. В качестве количественной характеристики коллапса рассматривается сферический объем, занимающий центральную часть скопления и содержащий в себе 10% его полной массы. Радиус этой сферы называют десятипроцентным радиусом. Явление коллапса начинается, когда десятипроцентный радиус уменьшается со временем. При этом центральная часть скопления неизбежно становится все плотнее и плотнее. Но, поскольку моделируемые звезды являются математическими точками, в таких звездных скоплениях никогда не происходит ничего страшного. В них не возникает никаких черных дыр. Это подтверждают и теоретики, занимающиеся моделированием звездных скоплений. У нас также пока мало свидетельств тому, что подобные ярко выраженные коллапсы случаются и в реальных скоплениях звезд. Какие-то факторы, по-видимому, мешают возникновению коллапса.



Шаровое звездное скопление Мессье 13 в созвездии Геркулеса

Как традиционные, так и современные эксперименты по моделированию звездных скоплений могут дать ключ к этой загадке. Во многих случаях начинающийся коллапс центральной части скопления фактически останавливался несколькими двойными звездными системами, расположенными в центре моделируемого скопления. В одном из экспериментов Джернигена достаточным для этого, по-видимому, оказалось присутствие лишь одной такой системы. Как это можно объяснить? По мнению аспиранта Д. Портера, работающего под руководством Джернигена, объяснение может заключаться в том, что «очень плотные двойные звездные системы вращаются с такой колоссальной скоростью, что отталкивают приближающиеся к ним звезды по касательной, и последние либо вращаются по круговым орбитам вокруг центра скопления, либо даже возвращаются в область меньшей плотности, окружающую ядро скопления и называемую короной. Это, наверное, и есть тот механизм, который пред-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

отвращает чрезмерное уплотнение ядра скопления».

В свое время Джерниген занимался наблюдением звезд — источников рентгеновского излучения. Когда его исследования сконцентрировались на поисках источников рентгеновского излучения в звездных скоплениях, он стал все больше интересоваться природой звездных скоплений как таковых. Моделирование показалось ему эффективным средством исследования.

Джерниген внес важный вклад в технику моделирования, повышающий его эффективность. В программе CLUSTER и других подобных программах один вычислительный цикл для n звезд требует n^2 шагов вычисления. Цикл Джернигена требует лишь $n \times \log n$ шагов. Он разбивает моделируемое скопление на пары соседних звезд. Затем каждая такая пара заменяется некоторой фиктивной массой и скоростью, описывающими результирующее поведение пары. Затем тот же процесс применяется уже к парам звезд так, как если бы они были отдельными звездами. По мере того как развивается этот процесс разбиения на пары, возникают все новые узлы масс в структуре данных, называемой деревом. При этом корневой узел дерева представляет уже все скопление звезд. Теперь можно вычислить характеристики движения как для центрального узла, так и для всех ветвей дерева, вплоть до индивидуальных звезд.

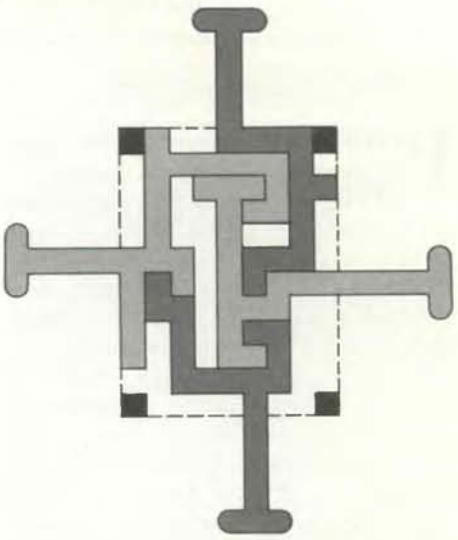
Принадлежит ли будущее этому методу? По мнению самого Джернигена, он определенно помогает ускорить вычисления. Однако будущие поколения программ, моделирующих звездные скопления, скорее всего будут основаны на гибридном методе, применяемом А. Лайтменом из Астрофизического центра обсерватории Гарвардского колледжа и Астрофизической обсерватории Смитсона, а также С. Макмилланом из Иллинойсского университета в Урбана-Шампейне. Согласно их методу, к звездам ядра скопления применяется непосредственно моделирование, описанное выше, а к звездам, находящимся вне ядра, применяются статистические методы моделирования так как если бы они представляли собой газ.

Читателям, владеющим языком программирования АПЛ, будет интересно познакомиться с новой публикацией Г. Чейтина из Исследовательского центра Т. Уотсона фирмы IBM в Йорктаун-Хайтсе (шт. Нью-Йорк). Она называется «An APL2 Gallery of Mathematical Physics» («Галерея математической физики на АПЛ-2») и представляет собой брошюру на 56 страницах, в которой приведены объяснения пяти важнейших физических теорий, включая как ньютоновское, так и релятивистское движение тел в космическом пространстве. Каждая рассмотренная теория иллюстрируется распечатками компьютерных программ, написанных на языке АПЛ.

В ДЕКАБРЬСКОМ номере журнала за прошлый год в этой рубрике разговор шел о трех головоломках: «колючке» Билла, «роге изобилия» Коффина и игрушке-вертушке Энджела. Головоломки заинтересовали сотни читателей: одни пытались найти магический способ, как разобрать хитроумно сочленяющиеся детали в «колючке» Билла, другие сосредоточили свое внимание на поиске решения задачи о размещении фишек полимино. Представители одной группы не могут помочь представителям другой: каждая из головоломок уникальна. Еще одна группа читателей без устали продолжает крутить колеса игрушки Энджела, тщетно пытаясь установить их в требуемом положении. Некоторым энтузиастам удалось добиться успеха, по крайней мере на абстрактном уровне. Уже начали поступать письма, в которых предлагается решение задачи.

Пришло также несколько писем с описанием конструкций двумерных «колючек» — игрушек, которые нужно разобрать на составляющие их детали. Наиболее изящная из предложенных читателями конструкций показана на рисунке вверху. Задача заключается в том, чтобы удалить четыре составляющие игрушку детали с прямоугольного подноса, границы которого изображены пунктирными линиями. Детали можно перемещать только в четырех направлениях в плоскости рисунка: вверх, вниз, влево и вправо. Четыре темных квадрата в углах считаются жестко прикрепленными к подносу. Какую из деталей следует переместить первой? Эту двумерную головоломку придумал Дж. Картер из Литтлтона (шт. Колорадо). Имея дело с трехмерной игрушкой, мы по крайней мере можем ее повертеть в руках и осмотреть со всех сторон. Толкать и тянуть детали, находящиеся в плоском ящике, как-то непривычно.

Р. Клавье из Далласа (шт. Техас) сообщил, что ему удалось найти алгоритмическое решение задачи Энджела. Он пишет, что его программа, написанная на Бейсике и выполняющаяся на портативном компьютере модели CC-40 фирмы Texas Instruments, на решение задачи обычно затрачивает от 300 до 700 ходов. В алгоритме используется шесть стандартных обменных операций между камнями и костями. Читатели, воспользовавшиеся предложенным мною способом представления последовательности, возможно, закинули свою сеть слишком широко. Решение, полученное для числовой последовательности, не всегда оказывается решением задачи. Формулируя свое предложение, я отдавал себе отчет в том, что в этом представлении не участвуют кости. «Ну, и ладно, — сказал я себе, — позаботимся о камнях, а кости позаботятся о себе сами». Оказалось, что я был неправ. Камни должны перемежаться с символами, представляющими кости.



Двумерная головоломка-колючка Дж. Картера

Чрезвычайно сложную головоломку подобного типа изобрел Р. Карлсон из Лос-Альтоса (шт. Калифорния). Ее настолько трудно изготовить, что пока он вынужден удовлетвориться только ее изображением на экране дисплея. Головоломка представляет собой икосаэдр, геометрическое тело, имеющее 20 треугольных граней. Каждая вершина может стать осью вращения при перемешивании граней. При повороте вершины вместе с ней поворачиваются пять прилегающих к ней треугольников. Каждый треугольник имеет три зоны разного цвета. В исходном упорядоченном положении к каждой вершине прилегают зоны одного цвета. Карлсон подготовил версию своей головоломки для персонального компьютера PC фирмы IBM. В дополнение к цветовому оформлению каждое перемещение сопровождается музыкальной нотой.